

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1. ความเป็นมาของโครงการ

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ คิดอย่างเป็นแบบแผน ช่วยให้คิดวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถ่องแท้ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีและศาสตร์อื่นๆที่เกี่ยวข้อง นับว่า คณิตศาสตร์มีประโยชน์ต่อการดำรงชีวิตและช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตของมนุษย์เป็นอย่างมาก ครูผู้สอนที่จะส่งเสริมให้นักเรียนได้พัฒนากระบวนการคิด มีเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์ได้ โดยการปรับวิธีการเรียนเปลี่ยนวิธีการสอนที่มุ่งให้นักเรียนได้รับการพัฒนาทางการคิดมากที่สุด ซึ่งอาจจะจัดในรูปแบบการจัดกิจกรรมที่ส่งเสริมความคิด การใช้คำถามที่ท้าทายเพื่อเป็นการพัฒนาผู้เรียนให้เป็นผู้ที่มีความรู้ ทักษะ และความสามารถต่างๆ สามารถใช้ความรู้ ทักษะ ไปใช้ในการแก้ปัญหาและตัดสินใจอย่างมีเหตุผล การที่จะทำให้การเรียนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพและประสบผลสำเร็จนั้น ควรที่จะมีการแสวงหาความคิดใหม่ๆ หรือนำความคิดใหม่ๆ มาผสมผสานกับเทคโนโลยี เพื่อช่วยพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถสูงสุด จะเห็นว่า โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นโปรแกรมหนึ่งที่จะช่วยในการพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพ เนื่องจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad สามารถนำเสนอเนื้อหาต่างๆ ให้เกิดความเข้าใจได้ง่ายขึ้น สามารถนำมาสำรวจ วิเคราะห์เนื้อหาต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ ได้เป็นอย่างดี และช่วยให้ผู้เรียนมีความคิดสร้างสรรค์ผลงานได้

ความสามารถในการหาแบบรูปหรือรูปทั่วไปเป็นศักยภาพหนึ่งทางคณิตศาสตร์ที่จะฝึกผู้เรียนให้เป็นคนช่างสังเกต มองความสัมพันธ์ของสิ่งที่สังเกตได้ ค้นหาลักษณะร่วม ลักษณะต่าง จนสรุปได้เป็นกฎเกณฑ์การหาแบบรูปแบบมักไม่ตายตัว สามารถคิดได้หลากหลาย ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ จินตนาการ ความรู้พื้นฐานและการคิดของผู้เรียน การที่เราสามารถค้นหาแบบรูป (pattern) ได้ อาจจะนำไปสู่การค้นพบที่น่าสนใจและสามารถนำไปประยุกต์เพื่อให้เกิดการเชื่อมโยงกับสิ่งต่างๆ ที่อยู่รอบตัว ในเรื่องของลำดับ (Sequence) คือ เซตที่เป็นสมาชิกของเรนจ์ของฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนนับที่เรียงกันจากน้อยไปมาก หรือแทนด้วย  $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$  หรือ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  ซึ่งเรียกว่าพจน์ของลำดับ จะเรียก  $a_1$  ว่าพจน์ที่ 1 เรียก  $a_2$  ว่าพจน์ที่ 2 เรียก  $a_3$  ว่าพจน์ที่ 3 เรียก  $a_4$  ว่าพจน์ที่ 4 เรียก  $a_n$  ว่าพจน์ที่  $n$  หรือพจน์ทั่วไป ในการหาพจน์ทั่วไปของลำดับจะต้องพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง  $a_n$  กับ  $n$  แล้วจึงสรุปเป็นกฎเกณฑ์ ซึ่งถ้าผู้เรียนมีทักษะในการพิจารณาความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้น จะทำให้สามารถหาพจน์ทั่วไปได้ และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ต่างๆ ได้เป็นอย่างดี เป็นกระบวนการที่ฝึกให้ผู้เรียนมีทักษะกระบวนการคิด รู้จักการแก้ปัญหาและรู้จักการนำไปใช้ จะช่วยให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จในการเรียนเป็นอย่างดี ดังนั้นเราจะเห็นว่า การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ มีความสำคัญในการเรียนเรื่องลำดับเป็นอย่างมาก

คณะผู้จัดทำโครงการคณิตศาสตร์ได้ศึกษาเรื่องการหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิต ทำให้สนใจปัญหาเกี่ยวกับการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าหรือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เกิดจากการย่อรูปต้นแบบโดยย่อด้านของรูปลงไปเรื่อยๆในอัตราส่วน 1:2 คณะผู้จัดทำได้ใช้แนวคิดในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพื่อเชื่อมโยงหาความสัมพันธ์ของพื้นที่ที่เกิดขึ้นและได้ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ช่วยในการสำรวจ ทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นและเห็นเป็นรูปธรรมที่ชัดเจน สามารถสรุปเป็นสูตรการหาพื้นที่ รูปที่  $n$  จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้ได้ โดยอาศัยความรู้เรื่องลำดับเรขาคณิตเข้ามาประยุกต์ใช้ ทำให้การหาพื้นที่รูปที่  $n$  จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดให้ง่ายขึ้น สะดวกในการนำไปใช้ และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาต่อในระดับสูงต่อไป

## 2. วัตถุประสงค์

- 2.1 เพื่อศึกษาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์
- 2.2 เพื่อศึกษาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสำรวจ
- 2.3 เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิต

## 3. เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์

- 3.1 การหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิต
- 3.2 ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence)
- 3.3 การหาพื้นที่โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

## 4. สมมติฐาน

เมื่อศึกษาแล้วสามารถหาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิตและสามารถสรุปเป็นสูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่  $n$  จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้ได้

## 5. ขอบเขตการศึกษา

- 5.1 ศึกษาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์
- 5.2 ศึกษาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสำรวจ

5.3 ศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิต

5.4 สถานที่ศึกษา โรงเรียนรัตนบุรี อำเภอรัตนบุรี จังหวัดสุรินทร์

5.5 ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษา วันที่ 20 มิถุนายน 2555 - 31 สิงหาคม 2555

## 6. วิธีการดำเนินงาน

6.1 รวบรวมจำนวนสมาชิก 3 คน เพื่อจัดตั้งกลุ่ม eworkงานคณิตศาสตร์ และประชุมปรึกษาหารือเกี่ยวกับการดำเนินการจัดทำโครงการ ระหว่างคณะผู้จัดทำโครงการกับครูที่ปรึกษา

6.2 วางแผนการดำเนินงานและกำหนดแนวทางในการดำเนินงาน

6.3 ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับเรื่องพื้นที่ของรูปเรขาคณิต ลำดับเรขาคณิต โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ตลอดจนเนื้อหาอื่น ๆ เกี่ยวกับการทำโครงการ

6.4 จัดทำเค้าโครงโครงการและนำเสนอครูที่ปรึกษาโครงการ เพื่อขอคำแนะนำและรับฟังข้อเสนอแนะ

6.5 นำข้อมูลมาวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิตและสามารถสรุปเป็นสูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่  $n$  จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้ได้

6.6 สรุปผลการดำเนินงาน ประชุมอภิปรายปัญหาต่างๆ และให้ข้อเสนอแนะ

6.7 จัดทำรายงานและแผนผังโครงการคณิตศาสตร์

6.8 นำเสนอโครงการคณิตศาสตร์

## 7. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

7.1 ทำให้ทราบถึงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิตโดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์และการสำรวจโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

7.2 ทำให้สามารถสรุปสูตรการหาพื้นที่รูปที่  $n$  จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้ได้

7.3 เพื่อส่งเสริมให้เกิดความรัก ความสนใจและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

7.4 เพื่อฝึกให้มีความคิดสร้างสรรค์ และมีทักษะในการทำงานเป็นกลุ่มเป็นการใช้เวลาว่างให้เป็นประโยชน์

## บทที่ 2

### หลักการ แนวคิด ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

การทำโครงการคณิตศาสตร์ในครั้งนี้ จะกล่าวถึงหัวข้อต่างๆ ดังนี้

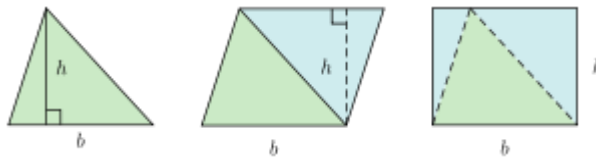
1. พื้นที่ของรูปเรขาคณิต
2. ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence)
3. โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

#### 1. พื้นที่ของรูปเรขาคณิต

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม สามารถแสดงได้เป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมีความยาวฐานกับความสูงที่เท่ากัน

การคำนวณพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเป็นปัญหาพื้นฐานที่มักจะพบในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน สูตรที่ง่ายและเป็นที่ยอมรับมากที่สุดคือ

$$s = \frac{1}{2}bh$$



รูปภาพที่ 1 แสดงรูปสามเหลี่ยม

เมื่อ  $s$  หมายถึงพื้นที่  $b$  คือความยาวของฐาน และ  $h$  คือความสูงหรือส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม คำว่าฐานในที่นี้สามารถหมายถึงด้านในด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม และส่วนสูงคือระยะที่วัดจากมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านนั้นตั้งฉากไปยังฐาน

ใช้สูตรของเฮรอน

อีกวิธีที่ใช้คำนวณ  $s$  ได้คือใช้สูตรของเฮรอน

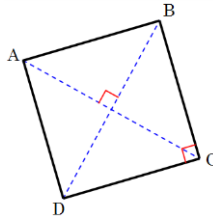
$$s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

เมื่อ  $s = (a+b+c)/2$  คือครึ่งหนึ่งของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม

**รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส** คือ รูปหลายเหลี่ยมที่มีด้านสี่ด้าน ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน และมุมภายในทุกมุมมีขนาดเท่ากัน ทำให้มุมแต่ละมุมเป็นมุมฉาก รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสามารถจัดได้ว่าเป็น รูปสี่เหลี่ยมปกติ, รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก, รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน, รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว, รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวเท่ากันและตัดกันเป็นมุมฉากที่จุดกึ่งกลาง ถ้าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีความยาวเท่ากัน แสดงว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนนั้นจะต้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านละ  $a$  หน่วย เท่ากับ  $a \times a = a^2$  ตารางหน่วย และเส้นรอบรูปจะยาวเท่ากับ  $4a$  หน่วย



รูปภาพที่ 2 แสดงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

## 2. ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence)

ลำดับ (Sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก  $n$  ตัวแรก  
หรือ ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก

โดย ลำดับจำกัด เป็นลำดับที่มีโดเมนของฟังก์ชันเป็น  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  คือ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

ลำดับอนันต์ เป็นลำดับที่มีโดเมนของฟังก์ชันเป็น  $\{1, 2, 3, \dots\}$  คือ  $a_1, a_2, a_3, \dots$   
ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\left. \begin{array}{l} f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots \\ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \end{array} \right\} \text{ เรียกว่าพจน์ของลำดับ}$$

เรียก  $a_1$  ว่าพจน์ที่ 1

เรียก  $a_2$  ว่าพจน์ที่ 2

เรียก  $a_3$  ว่าพจน์ที่ 3

เรียก  $a_4$  ว่าพจน์ที่ 4

⋮

เรียก  $a_n$  ว่าพจน์ที่  $n$  หรือพจน์ทั่วไป

**ลำดับเรขาคณิต** คือ ลำดับที่มีอัตราส่วนของพจน์ที่  $n+1$  ต่อพจน์ที่  $n$  หรือพจน์หลังต่อพจน์หน้าที่อยู่ติดกันมีค่าคงที่ ค่าคงที่นี้เรียกว่า อัตราส่วนร่วม (Common Ratio)

### การหาพจน์ที่ $n$ หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

จากลำดับเรขาคณิต  $2, 10, 50, 250, \dots$  พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ต่าง ๆ กับพจน์ที่ 1 และอัตราส่วนร่วม ( $r$ ) ดังนี้

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 10 = 2(5)^1 = 2(5)^{2-1}$$

$$a_3 = 50 = 2(5)^2 = 2(5)^{3-1}$$

$$a_4 = 250 = 2(5)^3 = 2(5)^{4-1}$$

⋮

$$a_n = 2(5)^{n-1}$$

ถ้าให้  $r = 5$ ,  $a_1 = 2$  จะได้  $a_n = a_1(r)^{n-1}$

∴ สูตรการหาพจน์ที่  $n$  ( $a_n$ ) หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

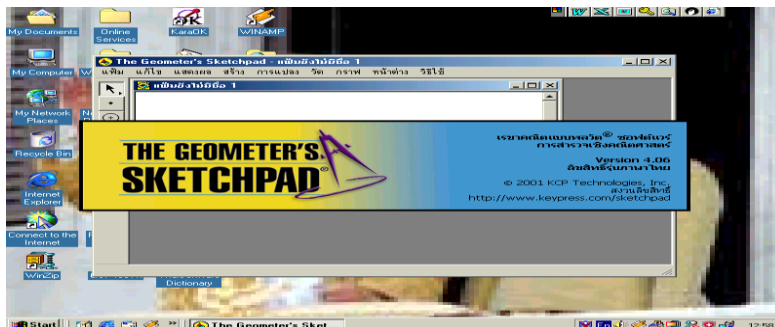
เมื่อ  $a_n$  เป็นพจน์ที่  $n$ ,  $r$  เป็นอัตราส่วนร่วม,  $a_1$  เป็นพจน์ที่ 1

### 3. โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หมายถึง ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ที่ช่วยให้ผู้เรียนเรียนคณิตศาสตร์ โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง สามารถสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ที่ทำให้เกิดการเคลื่อนไหวเชิงเรขาคณิต ตลอดจนถึงการแสดงการเคลื่อนไหวของรูปทรงเรขาคณิตแบบต่างๆ ที่ซับซ้อนให้เห็นได้ง่ายขึ้น ผู้เรียนสามารถวัด ตรวจสอบได้ด้วยตนเอง ให้ผลที่แน่นอนกว่า และส่งผลในทางบวกให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์สูงขึ้น นอกจากนั้นยังสามารถนำมาประยุกต์ใช้ และช่วยในการสรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนให้เห็นได้ง่ายขึ้น โดยเฉพาะเนื้อหาเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ ต่าง ๆ

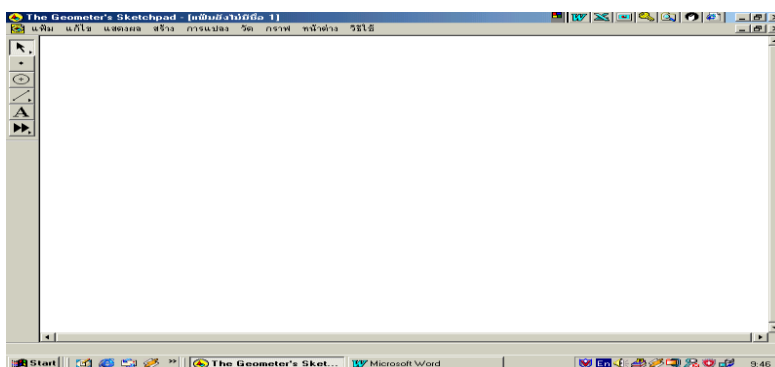
#### คำแนะนำการใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

เมื่อเปิดโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) จะเห็นคำว่า "The Geometer's Sketchpad" อยู่กึ่งกลางหน้าต่าง GSP คลิกหนึ่งครั้งเพื่อลบกล่อง คำว่า "The Geometer's Sketchpad"



รูปภาพที่ 3 แสดงหน้าต่างโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

หน้าต่าง GSP จะปรากฏดังรูป ประกอบด้วยแถบเมนู ลดขนาดหน้าต่างจอ ขยายหน้าต่างจอ คำสั่งปิด แบบร่าง แถบเลื่อน กล้องเครื่องมือจะอยู่ทางด้านซ้ายของแบบร่าง และสามารถดำเนินการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ได้ตามที่ต้องการ



รูปภาพที่ 4 แสดงแถบเครื่องมือคำสั่งและเมนูต่างๆของ โปรแกรม GSP

### บทที่ 3

## วิธีการดำเนินงานและเครื่องมือในการคำนวณ

กลุ่มผู้จัดทำโครงการคณิตศาสตร์จะกล่าวถึงวิธีการดำเนินงานและเครื่องมือที่ใช้ในการคำนวณดังนี้

1. ขั้นตอนการดำเนินงาน
2. เครื่องมือที่ใช้ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์

#### ขั้นตอนการดำเนินงาน

ขั้นตอนการดำเนินงานประกอบด้วยขั้นตอนต่างๆ ดังนี้

1. ขั้นเตรียมการ
2. ขั้นวางแผนการทำงาน
3. ขั้นลงมือปฏิบัติการ
4. ขั้นสรุปรายงานผล

#### 1. ขั้นเตรียมการ

1) คณะผู้จัดทำโครงการประกอบด้วยสมาชิก 3 คน คือ นายอรรถพล มีสัตย์, นางสาวภารดี จันทร์ทะพันธ์ และนางสาววิรดา จันทร์ทะพันธ์ ได้ศึกษาขั้นตอนการจัดทำโครงการคณิตศาสตร์จากเอกสารต่างๆที่เกี่ยวข้อง

2) คณะผู้จัดทำเลือกหัวข้อโครงการที่ตนเองสนใจและนำเสนอต่อครูที่ปรึกษาโครงการ

3) คณะผู้จัดทำโครงการและครูที่ปรึกษาโครงการ ร่วมกันอภิปรายในหัวข้อโครงการที่จะจัดทำและได้ข้อสรุปว่าจะจัดทำโครงการเรื่อง “ลำดับเรขาคณิตพิชิตพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่าและสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Overcoming of the Triangle and Square Area by using Geometric Sequence)”

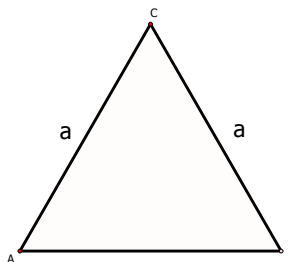
#### 2. ขั้นวางแผนการดำเนินงาน

1) ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับเรื่องพื้นที่ ลำดับเรขาคณิต การหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต เป็นต้น

2) ศึกษาเรื่อง การใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

#### 3. ขั้นลงมือปฏิบัติ

1) หาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จากรูปที่กำหนดให้  $\triangle ABC$  ความยาวของด้านยาวด้านละ  $a$  หน่วย



รูปภาพที่ 5 แสดงรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จากสูตรของเฮรอน

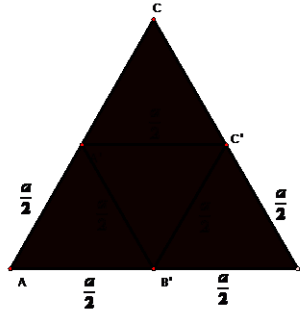
$$\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{เมื่อ } s = \frac{a+b+c}{2}$$

พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 1

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{\frac{3a}{2} \left( \frac{3a}{2} - a \right) \left( \frac{3a}{2} - a \right) \left( \frac{3a}{2} - a \right)} \\ &= \sqrt{\frac{3a}{2} \left( \frac{3a-2a}{2} \right) \left( \frac{3a-2a}{2} \right) \left( \frac{3a-2a}{2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{3a}{2} \left( \frac{a}{2} \right) \left( \frac{a}{2} \right) \left( \frac{a}{2} \right)} = \sqrt{\frac{3a}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^3} \\ &= \sqrt{\frac{3a^4}{2^4}} = \sqrt{\frac{3(a^2)^2}{(2^2)^2}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2^2} \\ A_1 &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้นพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 1 เท่ากับ  $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$  ตารางหน่วย

2) ดำเนินการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 2 โดยย่อด้านของสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 1 ลงในอัตราส่วน 1:2 ดังรูปที่กำหนดให้

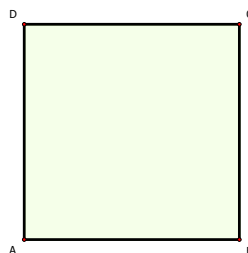


รูปภาพที่ 6 แสดงรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซ้อนกัน 2 รูป

3) ดำเนินการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าอีก 2 ครั้ง โดยการย่อด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่อยู่ภายในลงไปเรื่อยๆ ในอัตราส่วน 1:2

4) รวบรวมข้อมูลที่ได้นำมาหาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อสรุปหาสูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ n โดยใช้ความรู้เรื่องลำดับเรขาคณิต

5) หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จากรูปที่กำหนดให้  $\square ABCD$  ความยาวของด้านยาวด้านละ  $a$  หน่วย

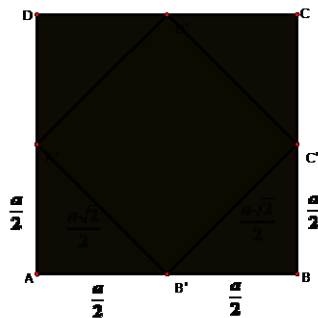


รูปภาพที่ 7 แสดงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 1 ( $A_1$ ) =  $a^2$  ตารางหน่วย

6) ดำเนินการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 2 โดยย่อด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 1 ลงในอัตราส่วน 1:2 ดังรูปที่กำหนดให้



รูปภาพที่ 8 แสดงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซ้อนกัน 2 รูป

7) ดำเนินการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอีก 2 ครั้ง โดยการย่อด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่ภายในลงไปเรื่อยๆ ในอัตราส่วน 1:2

8) รวบรวมข้อมูลที่ได้นำมาหาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อสรุปหาสูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่  $n$  โดยใช้ความรู้เรื่องลำดับเรขาคณิต

9) สืบหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad นำข้อมูลมาวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นเพื่อสรุปหาสูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่  $n$  โดยใช้ความรู้เรื่องลำดับเรขาคณิต

#### 4. ขั้นสรุปรายงานผล

- 1) ประชุมแบ่งหน้าที่ความรับผิดชอบให้แต่ละคนในการเขียนรายงาน โครงการงาน
- 2) ดำเนินการจัดทำโครงการฉบับร่าง
- 3) นำเสนอรายงานการจัดทำโครงการฉบับร่างให้ครูที่ปรึกษาโครงการตรวจสอบให้ข้อเสนอแนะ
- 4) แก้ไข ปรับปรุงรายงาน ตามที่ครูที่ปรึกษาโครงการได้ให้ข้อเสนอแนะ
- 5) จัดทำรูปเล่มโครงการคณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์ ตรวจสอบพิสูจน์ อักษร และการเรียบเรียงเนื้อหา
- 6) เสนอรายงานโครงการคณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์ต่อครูที่ปรึกษาโครงการ ตรวจสอบรับรองและเผยแพร่โครงการต่อไป

#### เครื่องมือที่ใช้ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์

1. สูตรการคำนวณหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิต
2. การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสำรวจหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิต

## บทที่ 4

### ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

จากผลการศึกษาข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูลในการจัดทำโครงการงานคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับ เรขาคณิตพีชคณิตพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่าและสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Overcoming of the Triangle and Square Area by using Geometric Sequence) ได้ทำการศึกษาแยกเป็น 3 ส่วน ดังนี้

ส่วนที่ 1 ศึกษาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนด โดยใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ส่วนที่ 2 ศึกษาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสำรวจ

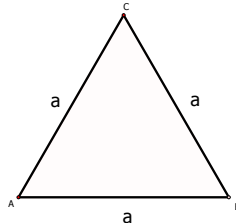
ส่วนที่ 3 ศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิต

ส่วนที่ 1 ศึกษาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนด โดยใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

#### 1. การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

##### 1.1 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 1

การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จากรูปที่กำหนดให้  $\triangle ABC$  ความยาวของด้านยาว ด้านละ  $a$  หน่วย



รูปภาพที่ 9 แสดงรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จากสูตรของเฮรอน

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า =  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  เมื่อ  $s = \frac{a+b+c}{2}$

การหาพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 1

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{\frac{3a}{2} \left( \frac{3a}{2} - a \right) \left( \frac{3a}{2} - a \right) \left( \frac{3a}{2} - a \right)} \\ &= \sqrt{\frac{3a}{2} \left( \frac{3a-2a}{2} \right) \left( \frac{3a-2a}{2} \right) \left( \frac{3a-2a}{2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{3a}{2} \left( \frac{a}{2} \right) \left( \frac{a}{2} \right) \left( \frac{a}{2} \right)} = \sqrt{\frac{3a}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^3} \end{aligned}$$

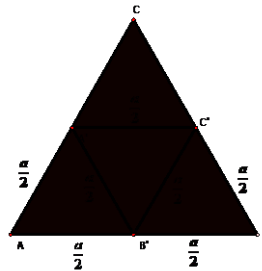
$$= \sqrt{\frac{3a^4}{2^4}} = \sqrt{\frac{3(a^2)^2}{(2^2)^2}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2^2}$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

ดังนั้นพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 1 เท่ากับ  $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$  ตารางหน่วย

### 1.2 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 2

การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จากรูปที่กำหนดให้  $\triangle A'B'C'$  ความยาวของด้านยาวด้านละ  $\frac{a}{2}$  หน่วย



รูปภาพที่ 10 แสดงรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซ้อนกัน 2 รูป

จากสูตรของเฮรอน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า =  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

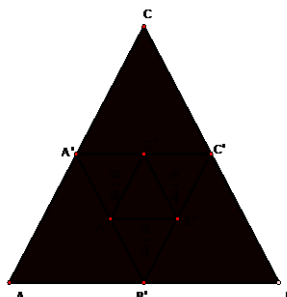
เมื่อ  $s = \frac{a+b+c}{2}$  จากรูปจะได้  $s = \frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}}{2} = \frac{3a}{2} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a}{4}$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 2 } (A_2) &= \sqrt{\frac{3a}{4} \left( \frac{3a}{4} - \frac{a}{2} \right) \left( \frac{3a}{4} - \frac{a}{2} \right) \left( \frac{3a}{4} - \frac{a}{2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{3a}{4} \left( \frac{3a-2a}{4} \right) \left( \frac{3a-2a}{4} \right) \left( \frac{3a-2a}{4} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{3a}{4} \left( \frac{a}{4} \right)^3} = \sqrt{\frac{3a^4}{4^4}} = \sqrt{\frac{3(a^2)^2}{(4^2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4^2} \\ A_2 &= \frac{\sqrt{3}a^2}{16} \end{aligned}$$

ดังนั้นพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 2 เท่ากับ  $\frac{\sqrt{3}a^2}{16}$  ตารางหน่วย

### 1.3 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 3

การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จากรูปที่กำหนดให้  $\triangle A''B''C''$  ความยาวของด้านยาวด้านละ  $\frac{a}{4}$  หน่วย



รูปภาพที่ 11 แสดงรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซ้อนกัน 3 รูป

จากสูตรของเฮรอน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า =  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\text{เมื่อ } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ จากรูปจะได้ } s = \frac{\frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4}}{2} = \frac{3a}{4} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a}{8}$$

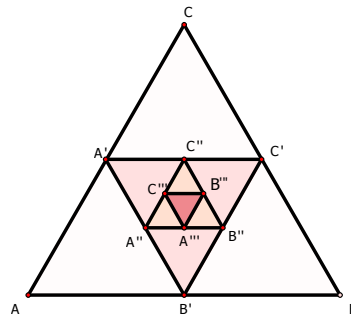
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 3 } (A_3) &= \sqrt{\frac{3a}{8} \left( \frac{3a}{8} - \frac{a}{4} \right)^3} \\ &= \sqrt{\frac{3a}{8} \left( \frac{3a}{8} - \frac{2a}{8} \right)^3} = \sqrt{\frac{3a}{8} \left( \frac{a}{8} \right)^3} = \sqrt{\frac{3a^4}{8^4}} \\ &= \sqrt{\frac{3(a^2)^2}{(8^2)^2}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{8^2} \\ A_3 &= \frac{\sqrt{3}a^2}{64} \end{aligned}$$

ดังนั้นพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 3 เท่ากับ  $\frac{\sqrt{3}a^2}{64}$  ตารางหน่วย

#### 1.4 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 4

การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จากรูปที่กำหนดให้  $\triangle A''B''C''$  ความยาวของด้านยาว

ด้านละ  $\frac{a}{8}$  หน่วย



รูปภาพที่ 12 แสดงรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซ้อนกัน 4 รูป

จากสูตรของเฮรอน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า =  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\text{เมื่อ } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ จากรูปจะได้ } s = \frac{\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{a}{8}}{2} = \frac{3a}{8} = \frac{3a}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a}{16}$$

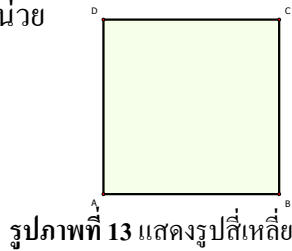
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 4 } (A_4) &= \sqrt{\frac{3a}{16} \left( \frac{3a}{16} - \frac{a}{8} \right)^3} \\ &= \sqrt{\frac{3a}{16} \left( \frac{a}{16} \right)^3} = \sqrt{\frac{3a^4}{16^4}} = \sqrt{\frac{3(a^2)^2}{(16^2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{16^2} \\ A_4 &= \frac{\sqrt{3}a^2}{256} \end{aligned}$$

ดังนั้นพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 4 เท่ากับ  $\frac{\sqrt{3}a^2}{256}$  ตารางหน่วย

## 2. การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

### 2.1 การหาพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 1

การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จากรูปที่กำหนดให้  $\square ABCD$  ความยาวของด้านยาวด้านละ  $a$  หน่วย

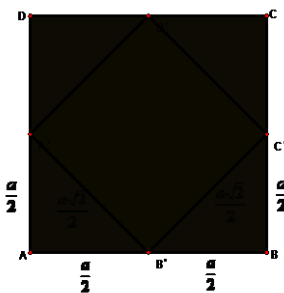


รูปภาพที่ 13 แสดงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 1 ( $A_1$ ) =  $a^2$  ตารางหน่วย

### 2.2 การหาพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 2

การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จากรูปที่กำหนดให้  $\square A'B'C'D'$  ความยาวของด้านยาวด้านละ  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  หน่วย



รูปภาพที่ 14 แสดงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซ้อนกัน 2 รูป

จะได้พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $A_2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{1}{2}a^2$

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 2 ( $A_2$ ) =  $\frac{1}{2}a^2$  ตารางหน่วย

หาความยาวด้านของ  $\square A'B'C'D'$

โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

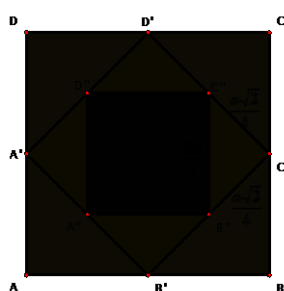
$$c^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$$

$$c = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$c = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ หน่วย}$$

### 2.3 การหาพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 3

การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จากรูปที่กำหนดให้  $\square A''B''C''D''$  ความยาวของด้านยาวด้านละ  $\frac{2a}{4}$  หน่วย



หาความยาวด้านของ  $\square A''B''C''D''$

โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$c^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$c^2 = \frac{2a^2}{16} + \frac{2a^2}{16} = \frac{4a^2}{16}$$

$$c = \sqrt{\frac{4a^2}{16}} = \frac{2a}{4}$$

$$c = \frac{2a}{4} \text{ หน่วย}$$

รูปภาพที่ 15 แสดงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซ้อนกัน 3 รูป

จะได้พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $A_3 = \left(\frac{2a}{4}\right)^2 = \frac{4a^2}{16} = \frac{1}{4}a^2$

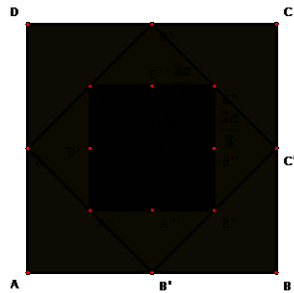
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 3 ( $A_3$ ) =  $\frac{1}{4}a^2$  ตารางหน่วย

2.4 การหาพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 4

การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จากรูปที่กำหนดให้  $\square A'''B'''C'''D'''$  ความยาวของด้านยาวด้านละ  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$  หน่วย

หาความยาวด้านของ  $\square A'''B'''C'''D'''$

โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส



$$c^2 = \left(\frac{2a}{8}\right)^2 + \left(\frac{2a}{8}\right)^2$$

$$c^2 = \frac{4a^2}{64} + \frac{4a^2}{64} = \frac{8a^2}{64}$$

$$c = \sqrt{\frac{4 \cdot 2a^2}{64}} = \frac{2a\sqrt{2}}{8} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$c = \frac{a\sqrt{2}}{4} \text{ หน่วย}$$

รูปภาพที่ 16 แสดงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซ้อนกัน 4 รูป

จะได้พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $A_4 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2a^2}{16} = \frac{1}{8}a^2$

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 4 ( $A_4$ ) =  $\frac{1}{8}a^2$  ตารางหน่วย

ส่วนที่ 2 ศึกษาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสำรวจ

1. การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

พื้นที่  $\triangle ABC = 22.74 \text{ ซม.}^2$   
 พื้นที่  $\triangle A'CB' = 5.69 \text{ ซม.}^2$   
 พื้นที่  $\triangle B'A''C'' = 1.42 \text{ ซม.}^2$   
 พื้นที่  $\triangle C''B'''A''' = 0.36 \text{ ซม.}^2$

(พื้นที่  $\triangle A'CB'$ ) = 0.25  
 (พื้นที่  $\triangle ABC$ )  
 (พื้นที่  $\triangle B'A''C''$ ) = 0.25  
 (พื้นที่  $\triangle A'CB'$ )  
 (พื้นที่  $\triangle C''B'''A'''$ ) = 0.25  
 (พื้นที่  $\triangle B'A''C''$ )

$AA' = 3.62 \text{ ซม.}$   
 $CA' = 3.62 \text{ ซม.}$   
 $CB' = 3.62 \text{ ซม.}$   
 $A''A''' = 0.91 \text{ ซม.}$   
 $A''B''' = 0.91 \text{ ซม.}$   
 $A''C''' = 0.91 \text{ ซม.}$

รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	พื้นที่ ( ตร.ซม. )	อัตราส่วนร่วม	ความสัมพันธ์ของพื้นที่กับ อัตราส่วน	พจน์ทั่วไป
รูปที่ 1	22.74	-	-	$A_1$
รูปที่ 2	5.69	$\frac{5.69}{22.74} = 0.25$	$(22.74)(0.25) = 5.69$	$A_1(0.25)$
รูปที่ 3	1.42	$\frac{1.42}{5.69} = 0.25$	$(22.74)(0.25)^2 = 1.42$	$A_1(0.25)^2$
รูปที่ 4	0.36	$\frac{0.36}{1.42} = 0.25$	$(22.74)(0.25)^3 = 0.36$	$A_1(0.25)^3$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
รูปที่ n	f(n)	$\frac{f(n)}{f(n-1)} = 0.25$	$(22.74)(0.25)^{n-1} = f(n)$	$A_1(0.25)^{n-1}$
ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ n = $A_1(0.25)^{n-1}$				

ตารางที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

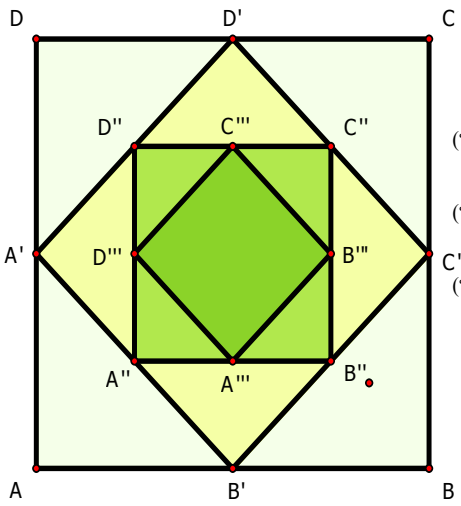
จากตารางที่ 1 พบว่า ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ 1, 2, 3, ..., n เขียนได้ เป็น  $A_1, A_1(0.25), A_1(0.25)^2, A_1(0.25)^3, \dots, A_1(0.25)^{n-1}$  ซึ่งอยู่ในรูปของลำดับเรขาคณิต โดยมี อัตราส่วนร่วม  $(r) = 0.25$  ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ n คือ  $A_n = A_1(0.25)^{n-1}$  หรือ

$$A_n = A_1 \left( \frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

## 2. การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	พื้นที่ (ตร.ชม.)	อัตราส่วนร่วม	ความสัมพันธ์ของพื้นที่กับอัตราส่วน	พจน์ทั่วไป
รูปที่ 1	39.09	-	-	$A_1$
รูปที่ 2	19.52	$\frac{19.52}{39.09} = 0.50$	$(39.09)(0.50) = 19.52$	$A_1(0.50)$
รูปที่ 3	9.76	$\frac{9.76}{19.52} = 0.50$	$(39.09)(0.50)^2 = 9.76$	$A_1(0.50)^2$
รูปที่ 4	4.88	$\frac{4.88}{9.76} = 0.50$	$(39.09)(0.50)^3 = 4.88$	$A_1(0.50)^3$

$A = 2.00$   
 $1$   
 $A = 0.50$   
 พื้นที่ DCBA = 39.03 ชม.<sup>2</sup>  
 พื้นที่ A'D'C'B' = 19.52 ชม.<sup>2</sup>  
 พื้นที่ A''D''C''B'' = 9.76 ชม.<sup>2</sup>  
 พื้นที่ D'''C'''B'''A''' = 4.88 ชม.<sup>2</sup>  
 (พื้นที่ A'D'C'B')  
 (พื้นที่ DCBA) = 0.50  
 (พื้นที่ A''D''C''B'') = 0.50  
 (พื้นที่ A'D'C'B') = 0.50  
 (พื้นที่ D'''C'''B'''A''') = 0.50  
 (พื้นที่ A''D''C''B'') = 0.50



(พื้นที่ DCBA) · (พื้นที่ A'D'C'B') = 19.52 ชม.<sup>2</sup>  
 (พื้นที่ DCBA)  
 (พื้นที่ A''D''C''B'')<sup>2</sup> = 9.76 ชม.<sup>2</sup>  
 (พื้นที่ A'D'C'B')  
 (พื้นที่ D'''C'''B'''A''')<sup>3</sup> = 4.88 ชม.<sup>2</sup>  
 (พื้นที่ DCBA) · (พื้นที่ A''D''C''B'')

ตารางที่ 2 แสดงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยใช้โปรแกรม GSP



รูปที่ n	f(n)	$\frac{f(n)}{f(n-1)} = 0.50$	$(39.09)(0.50)^{n-1} = f(n)$	$A_1(0.50)^{n-1}$
ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปที่ n = $A_1(0.50)^{n-1}$				

จากตารางที่ 2 พบว่า ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปที่ 1, 2, 3, ..., n เขียนได้เป็น  $A_1, A_1(0.50), A_1(0.50)^2, A_1(0.50)^3, \dots, A_1(0.50)^{n-1}$  ซึ่งอยู่ในรูปของลำดับเรขาคณิต โดยมีอัตราส่วนร่วม  $(r) = 0.50$  ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ n คือ  $A_n = A_1(0.50)^{n-1}$  หรือ  $A_n = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

### ส่วนที่ 3 ศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิต

#### 1. ความสัมพันธ์ของพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่ากับลำดับเรขาคณิต

ตารางที่ 3 แสดงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าโดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์

รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	พื้นที่ ( ตร.หน่วย )	อัตราส่วนร่วม	ความสัมพันธ์ของพื้นที่กับอัตราส่วน	พจน์ทั่วไป
รูปที่ 1	$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	-	-	$A_1$
รูปที่ 2	$\frac{\sqrt{3}a^2}{16}$	$\frac{\sqrt{3}a^2}{16} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{16}$	$A_1\left(\frac{1}{4}\right)^2$
รูปที่ 3	$\frac{\sqrt{3}a^2}{64}$	$\frac{\sqrt{3}a^2}{64} \cdot \frac{16}{\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{64}$	$A_1\left(\frac{1}{4}\right)^3$
รูปที่ 4	$\frac{\sqrt{3}a^2}{256}$	$\frac{\sqrt{3}a^2}{256} \cdot \frac{64}{\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}a^2}{256}$	$A_1\left(\frac{1}{4}\right)^4$
รูปที่ n	f(n)	$\frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = f(n)$	$A_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ n = $A_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$				

จากตารางที่ 3 พบว่า ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ 1, 2, 3, ..., n เขียนได้เป็น  $A_1, A_1\left(\frac{1}{4}\right), A_1\left(\frac{1}{4}\right)^2, A_1\left(\frac{1}{4}\right)^3, \dots, A_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$  ซึ่งอยู่ในรูปของลำดับเรขาคณิต โดยมีอัตราส่วนร่วม  $(r) = \frac{1}{4}$  ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ n คือ  $A_n = A_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

#### 1. ความสัมพันธ์ของพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิต

ตารางที่ 4 แสดงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	พื้นที่	อัตราส่วนร่วม	ความสัมพันธ์ของพื้นที่	พจน์ทั่วไป
----------------------	---------	---------------	------------------------	------------

	(ตร.หน่วย)		กับอัตราส่วน	
รูปที่ 1	$a^2$	-	-	$A_1$
รูปที่ 2	$\frac{1}{2}a^2$	$\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2}$	$(a^2)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a^2$	$A_1\left(\frac{1}{2}\right)$
รูปที่ 3	$\frac{1}{4}a^2$	$\frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{2}{a^2} = \frac{1}{2}$	$(a^2)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2$	$A_1\left(\frac{1}{2}\right)^2$
รูปที่ 4	$\frac{1}{8}a^2$	$\frac{1}{8}a^2 \cdot \frac{4}{a^2} = \frac{1}{2}$	$(a^2)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}a^2$	$A_1\left(\frac{1}{2}\right)^3$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
รูปที่ n	f(n)	$\frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{1}{2}$	$(a^2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = f(n)$	$A_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปที่ n =  $A_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

จากตารางที่ 4 พบว่า ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปที่ 1, 2, 3, ..., n เขียนได้เป็น  $A_1, A_1\left(\frac{1}{2}\right), A_1\left(\frac{1}{2}\right)^2, A_1\left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, A_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  ซึ่งอยู่ในรูปของลำดับเรขาคณิต โดยมีอัตราส่วนร่วม  $(r) = \frac{1}{2}$  ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ n คือ  $A_n = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

## บทที่ 5

### สรุป อภิปรายและข้อเสนอแนะ

#### 1. ความเป็นมาของโครงการ

คณะผู้จัดทำโครงการคณิตศาสตร์ได้ศึกษาเรื่องการหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิต ทำให้สนใจปัญหาเกี่ยวกับการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าหรือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เกิดจากย่อรูปต้นแบบโดยย่อด้านของรูปลงไปเรื่อยๆ ในอัตราส่วน 1:2 คณะผู้จัดทำได้ใช้แนวคิดในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพื่อเชื่อมโยงหาความสัมพันธ์ของพื้นที่ที่เกิดขึ้นและได้ใช้

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ช่วยในการสำรวจ ทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นและเห็นเป็นรูปธรรมที่ชัดเจน สามารถสรุปเป็นสูตรการหาพื้นที่ รูปที่  $n$  จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้ได้ โดยอาศัยความรู้เรื่องลำดับเรขาคณิตเข้ามาประยุกต์ใช้ ทำให้การหาพื้นที่รูปที่  $n$  จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดให้ง่ายขึ้น สะดวกในการนำไปใช้ และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาต่อในระดับสูงต่อไป

## 2. วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

2. เพื่อศึกษาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสำรวจ

3. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิต

## 3. เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์

3.1 การหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิต

3.2 ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence)

3.3 การหาพื้นที่โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

## 4. สมมติฐาน

เมื่อศึกษาแล้วสามารถหาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิตและสามารถสรุปเป็นสูตรการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่  $n$  จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้ได้

## 5. ขอบเขตการศึกษา

5.1 ศึกษาการหาพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

5.2 ศึกษาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสำรวจ

5.3 ศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิต

5.3 สถานที่ศึกษา โรงเรียนรัตนบุรี อำเภอรัตนบุรี จังหวัดสุรินทร์

5.4 ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษา วันที่ 20 มิถุนายน 2555 - 31 สิงหาคม 2555

## 6. วิธีการดำเนินงาน

6.2 รวบรวมจำนวนสมาชิก 3 คน เพื่อจัดตั้งกลุ่มโครงการคณิตศาสตร์ และประชุมปรึกษาหารือเกี่ยวกับการดำเนินการจัดทำโครงการ ระหว่างคณะผู้จัดทำโครงการกับครูที่ปรึกษา

6.2 วางแผนการดำเนินงานและกำหนดแนวทางในการดำเนินงาน

6.3 ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับเรื่องพื้นที่ของรูปเรขาคณิต ลำดับเรขาคณิต โปรแกรม

The Geometer's Sketchpad ตลอดจนเนื้อหาอื่น ๆ เกี่ยวกับการทำโครงการ

6.4 จัดทำเค้าโครงโครงการและนำเสนอครูที่ปรึกษาโครงการ เพื่อขอคำแนะนำและรับฟังข้อเสนอแนะ

6.5 นำข้อมูลมาวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิตและสามารถสรุปเป็นสูตรการหาพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่  $n$  จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้ได้

6.6 สรุปผลการดำเนินงาน ประชุมอภิปรายปัญหาต่างๆ และให้ข้อเสนอแนะ

6.7 จัดทำรายงานและแผนผังโครงการคณิตศาสตร์

6.8 นำเสนอโครงการคณิตศาสตร์

## 7. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

7.1 ทำให้ทราบถึงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับลำดับเรขาคณิตโดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์และการสำรวจโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

7.2 ทำให้สามารถสรุปสูตรการหาพื้นที่รูปที่  $n$  จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้ได้

7.3 เพื่อส่งเสริมให้เกิดความรัก ความสนใจและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

7.4 เพื่อฝึกให้มีความคิดสร้างสรรค์ และมีทักษะในการทำงานเป็นกลุ่มเป็นการใช้เวลาว่างให้เป็นประโยชน์

## 8. อภิปรายผล

จากผลการดำเนินงานพบว่า การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ของพื้นที่

รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ 1, 2, 3, ...,  $n$  เขียนได้เป็น  $A_1, A_1\left(\frac{1}{4}\right), A_1\left(\frac{1}{4}\right)^2, A_1\left(\frac{1}{4}\right)^3, \dots, A_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$  ซึ่งอยู่ในรูปของลำดับเรขาคณิต โดยมีอัตราส่วนร่วม  $(r) = \frac{1}{4}$  ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่  $n$

คือ  $A_n = A_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$  และ ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปที่ 1, 2, 3, ...,  $n$  เขียนได้เป็น  $A_1, A_1\left(\frac{1}{2}\right), A_1\left(\frac{1}{2}\right)^2, A_1\left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, A_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  ซึ่งอยู่ในรูปของลำดับเรขาคณิต โดยมีอัตราส่วนร่วม  $(r) = \frac{1}{2}$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่  $n$  คือ  $A_n = A_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

จากการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสำรวจ พบว่า ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ 1, 2, 3, ...,  $n$  เขียนได้เป็น  $A_1, A_1(0.25), A_1(0.25)^2, A_1(0.25)^3, \dots, A_1(0.25)^{n-1}$  ซึ่งอยู่ในรูปของลำดับเรขาคณิต โดยมีอัตราส่วนร่วม  $(r) = 0.25$  ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่  $n$  คือ

$A_n = A_1(0.25)^{n-1}$  หรือ  $A_n = A_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$  และความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปที่ 1, 2, 3, ...,  $n$  เขียนได้เป็น  $A_1, A_1(0.50), A_1(0.50)^2, A_1(0.50)^3, \dots, A_1(0.50)^{n-1}$  ซึ่งอยู่ในรูปของลำดับเรขาคณิต

โดยมีอัตราส่วนร่วม  $(r) = 0.50$  ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่  $n$  คือ  $A_n = A_1(0.50)^{n-1}$  หรือ

$$A_n = A_1 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

### 9. สรุปผลการดำเนินงาน

สรุปได้ว่า การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากรูปที่กำหนดโดยใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสำรวจ พบว่าพื้นที่

ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่  $n$  คือ  $A_n = A_1 \left( \frac{1}{4} \right)^{n-1}$

เมื่อ  $A_1$  คือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่ 1

และพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปที่  $n$  คือ  $A_n = A_1 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$

เมื่อ  $A_1$  คือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 1

### 10. ข้อเสนอแนะ

10.1 ควรมีการศึกษาในเรื่องอื่นๆ เช่น การหาพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า หกเหลี่ยมด้านเท่า เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า เป็นต้น แล้วสรุปเป็นสูตรในการหาพื้นที่

10.2 ควรมีการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสำรวจหาพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า หกเหลี่ยมด้านเท่า เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า เป็นต้น แล้วสรุปหาความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้น

10.3 ควรมีการเผยแพร่เรื่องการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ให้กับผู้ที่สนใจเพิ่มมากขึ้นเพื่อเป็นประโยชน์ในการศึกษาต่อไป

10.4 ควรมีการนำโจทย์เกี่ยวกับเรื่องพื้นที่และลำดับเรขาคณิต มาศึกษาเพื่อเป็นประโยชน์ในการศึกษาในระดับที่สูงขึ้นไป