โครงงานคณิตศาสตร์

เรื่อง การอธิบายการหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟในช่วง [a.b] บนแกน X

โดยใช้โปรแกรม GSP

โดย

1. นายสิริชัย ศิริโชค

2. นายสหรัฐ โคตรชารี

3. นางสาวสายธาร พันธะวงศ์

โรงเรียน กัลยาณวัตร อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น

สำนักเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 25 ปีการศึกษา 2557

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงงานคณิตศาสตร์

ประเภท อธิบายทฤษฎี ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

โครงงานคณิตศาสตร์

เรื่อง การอธิบายการหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟในช่วง [a.b] บนแกน X

โดยใช้โปรแกรม GSP

โดย

1. นายสิริชัย ศิริโชค

2. นายสหรัฐ โคตรชารี

3. นางสาวสายธาร พันธะวงศ์

โรงเรียน กัลยาณวัตร อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น

สำนักเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 25 ปีการศึกษา 2557

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงงานคณิตศาสตร์

ประเภท อธิบายทฤษฎี ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ชื่อเรื่อง : การอธิบายการหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟในช่วง [a.b] บนแกน X โดยใช้โปรแกรม GSP

ผู้จัดทำ : 1. นายสิริชัย ศิริโชค

2. นายสหรัฐ โคตรชารี

3. นางสาวสายธาร พันธวงค์

ครูที่ปรึกษา นางสุธีรา แก้วบุญเรือง

ครูที่ปรึกษาร่วม นายคณิต ไวท์ยางกูร

ปีที่จัดทำ : พุทธศักราช 2557

บทคัดย่อ

การศึกษาเรื่องการหาพื้นที่ ใต้กราฟต่อเนื่องในช่วง [a,b] บนแกน X โดยเฉพาะกราฟเส้นโค้งซึ่งมีความยุ่งยากและซับซ้อน จึงต้องอาศัยเรื่องแคลคูลัสประกอบการคำนวณ โดยผู้จัดทำได้ใช้โปรแกรม GSP ประกอบกับการศึกษาและอธิบาย โดยจะศึกษาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรง บนแกน X ในช่วง [a,b] จากการเขียนกราฟจะได้กราฟ 2 ลักษณะคือลักษณะรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งจะใช้โปรแกรม GSP คำนวณหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรงประกอบกับการคำนวณจากสูตรการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อเปรียบเทียบกันจะได้ว่าค่าที่คำนวณได้มีค่ าเท่ากัน และจะศึกษาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งบนแกน X ในช่วง [a,b] เนื่องจากยังไม่มีสูตรโดยตรงเพื่อใช้ในการคำนวณ จึงใช้วิธีการหาพื้นที่โดยจะใช้โปรแกรม GSP สร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหลายๆรูปใต้พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้ง การคำนวณหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแต่ละรูปแล้วนำมา บวกกัน จะได้พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้ง ประกอบกับการคำนวณโดยอาศัยเรื่องแคลคูลัส การหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต เมื่อจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีจำนวนมากขึ้น จะได้ค่าของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งที่มีความใกล้เคียงกับการคำนวณการหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การอธิบายการหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟบนช่วง [a,b] บนแกน X โดยใช้โปรแกรม GSP ครั้งนี้ สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีเพราะคณะผู้จัดทำโครงงานได้รับความเมตตากรุณา การให้คำปรึกษา ข้อเสนอแนะ แก้ไข ติดตาม ดูแล และคอยช่วยเหลือในด้านต่างๆ มาตลอด โดยคุณครูสุธีรา แก้วบุญเรือง และคุณครูคณิต ไวท์ยางกูร คุณครูที่ปรึกษาและที่ปรึกษาร่วมในการทำโครงงานครั้งนี้ตามลำดับ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนกัลยาณวัตร อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น คณะผู้ทำโครงงานขอขอบพระคุณเป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบพระคุณท่านผู้อำนวยการ นายลิขิต เพชรผล ผู้อำนวยการโรงเรียนกัลยาณวัตร อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น ที่ให้การสนับสนุนวัสดุอุปกรณ์และงบประมาณจัดทำงานโครงงานในครั้งนี้ขึ้น

ตลอดระยะเวลาในการจัดทำงานโครงงานครั้งนี้ ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ผู้ซึ่งให้ความรัก ความเมตตา ความห่วงใย และเป็นกำลังใจให้กับคณะผู้จัดทำโครงงานในครั้งนี้จนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

คณะผู้จัดทำโครงงาน

สารบัญ

บทที่ หน้า

1. บทนำ

ที่มาและความสำคัญ.. 1

วัตถุประสงค์... 1

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ... 1

ขอบเขตของการศึกษา.. 1

นิยามศัพท์เฉพาะ.. 2

2. เอกสารที่เกี่ยวข้อง

อนุกรมอนันต์... 3

ลิมิตและความต่อเนื่อง.. 3

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน... 4

ปริพันธ์ของฟังก์ชัน... 7

3. อุปกรณ์และวิธีการดำเนินงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน.. 11

วัสดุอุปกรณ์... 12

4. ผลการดำเนินงาน

อธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรงบนแกน x ในช่วง [a, b] โดยการใช้โปรแกรม GSP....13

อธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งบนแกน x ในช่วง [a, b] โดยการใช้โปรแกรม GSP....18

5. สรุปผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผลการดำเนินงาน... 19

ข้อเสนอแนะ.. 19

บรรณานุกรม.. 20

บทที่ 1

บทนำ

ที่มาและความสำคัญ

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่เน้นทักษะและกระบวนการทางความคิด การคำนวณ และการแก้ปัญหา ทำให้เกิดทฤษฎี บทนิยาม และสูตรทางคณิตศาสตร์อย่างมากมาย สูตรต่างๆในคณิตศาสตร์ล้วนมีความถูกต้องและแม่นยำในการคำนวณเพื่อหาคำตอบของสิ่งต่างๆ แม้แต่การหาพื้นที่ของรูปต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นรูป 2 มิติหรือรูปทรง 3 มิติ ล้วนมีสูตรในการคำนวณทั้งสิ้น

สำหรับสมการทางคณิตศาสตร์บางสมการ มีการคำนวณเพื่อหาคำตอบและนำไปใช้ในการสร้างกราฟ ซึ่งคำตอบของสมการแต่ละสมการก็แตกต่างกันออกไป ทำให้ได้กราฟที่มีลักษณะต่างกัน มีทั้งกราฟที่เป็นเส้นตรงและกราฟที่เป็นเส้นโค้ง โดยการหาพื้นที่ใต้กราฟที่เป็นเส้นโค้งนั้น มีความซับซ้อน ยังไม่มีสูตรโดยตรงเพื่อใช้ในการคำนวณ จึงต้องอาศัยความรู้เรื่องแคลคูลัส(Calculus) มาประกอบการคำนวณ

โครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การอธิบายการหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟในช่วง $[a, b]$ บนแกน X เป็นโครงงานที่ได้มีผู้สนใจศึกษามาบ้างแล้วผู้จัดทำได้เล็งเห็นความไม่สมบูรณ์ในบางส่วนของเนื้อหาจึงนำมาศึกษาต่อ และต่อยอดโครงงานให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้นเนื่องจาก ผู้จัดทำได้ให้ความสนใจที่จะศึกษาเกี่ยวกับการคำนวณหาพื้นที่ใต้กราฟโดยการใช้โปรแกรม GSP ประกอบกับการศึกษาและการอธิบาย

วัตถุประสงค์

1. เพื่ออธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรงในช่วง $[a, b]$ บนแกน x โดยการใช้โปรแกรม GSP
2. เพื่ออธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งในช่วง $[a, b]$ บนแกน x โดยการใช้โปรแกรม GSP

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เพื่อความสะดวกและรวดเร็วในการหาพื้นที่ใต้กราฟโดยการใช้โปรแกรม GSP
2. เพื่อความสะดวกต่อการอธิบายเพื่อสร้างความเข้าใจในการหาพื้นที่ใต้กราฟโดยการใช้โปรแกรม GSP
3. เพื่อฝึกฝนทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการศึกษา

1. การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรงที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ บนแกน x
2. การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ บนแกน x

3. ใช้โปรแกรม GSP ในการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรงในช่วง $[a, b]$บนแกน xและในการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งในช่วง $[a, b]$บนแกน x

นิยามศัพท์เฉพาะ

- **โปรแกรม Geometer's Sketchpad (GSP)** เป็นโปรแกรมที่มีประสิทธิภาพโปรแกรมหนึ่ง สามารถนำไปใช้ในวิชาคณิตศาสตร์ได้หลายสาขา เช่น เรขาคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ และแคลคูลัส

- **การแบ่งพื้นที่ย่อยๆ** คือ การแบ่งพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งออกเป็นช่องเล็กๆ ที่มีขนาดความกว้างเท่ากัน

- **แบ่งพื้นที่แบบขาด** คือ การแบ่งพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งออกเป็นช่องเล็กๆ ที่มีขนาดเท่ากัน โดยเลือกจุดด้านซ้ายของ กราฟเป็นความสูงของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

-**แบ่งพื้นที่แบบเกิน** คือ การแบ่งพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งออกเป็นช่องเล็กๆ ที่มีขนาดความกว้างเท่ากัน โดยเลือกจุดด้านขวาของกราฟเป็นความสูงของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

บทที่ 2

เอกสารที่เกี่ยวข้อง

ในการทำโครงงานครั้งนี้ คณะผู้จัดทำได้ศึกษาเอกสารและคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

1. อนุกรมอนันต์
2. ลิมิตและความต่อเนื่อง
3. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
4. ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

1. อนุกรมอนันต์

ให้ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ โดย S_n คือ " ผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม "

และ $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ คือ " ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม "

1. ถ้า $\lim_{n \to \infty} s_n$ หาค่าได้ เรียกค่าลิมิตดังกล่าวว่าเป็นผลบวกของอนุกรม และเรียกอนุกรมดังกล่าวว่า **อนุกรมคอนเวอร์เจนต์** (Convergent)
2. ถ้า $\lim_{n \to \infty} s_n$ หาค่าไม่ได้แสดงว่าอนุกรมดังกล่าวไม่สามารถหาผลบวกได้ และเรียกอนุกรมดังกล่าวว่า**อนุกรมไดเวอร์เจนต์** (Divergent)

2. ลิมิตและความต่อเนื่อง(Limits and Continuity)

ใน หัวข้อนี้จะกล่าวถึงเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญของแคลคูลัส(Calculus) คือเรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง (Limits and Continuity) ซึ่งเนื้อหาประกอบด้วยการให้นิยามและความหมาย ตลอดจนทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง รวมถึงการแสดงวิธีการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันและการทดสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุดต่างๆ

2.1 ลิมิต(limits)

ในส่วนของฟังก์ชันโดยทั่วไปนิยมการหาค่าของฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่ง ซึ่งในบางครั้งไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันในบางจุดได้ แต่อย่างไรก็ตามอาจให้ความสนใจค่าของฟังก์ชันที่พารามิเตอร์ของฟังก์ชันขณะมีค่าเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง

นิยาม 2.1กำหนด fเป็นฟังก์ชันโดยที่$\mathrm{f(x)}$นิยามบนช่วงเปิดรอบจุดaจะกล่าวว่า$\mathrm{f(x)}$มีค่าเข้าใกล้k เมื่อ xมีค่าเข้าใกล้ a ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ แล้วมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |\mathrm{x} - \mathrm{a}| < \delta$ แล้ว$|\mathrm{f(x)} - \mathrm{k}| < \varepsilon$ทั้งนี้จะเขียนแทนด้วย$\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{a}} \mathrm{f(x)} = \mathrm{k}$

หมายเหตุ ในการแสดงว่า $\lim_{x\to a} f(x) = k$ โดยใช้นิยามนั้นเป็นการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งโดยทั่วไปมักใช้ในกรณีที่เป็นทางการ (Formal) เท่านั้น

สมบัติของลิมิต

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า K, L, a และ c เป็นจำนวนจริง และ $\lim_{x\to a} f(x) = K$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = L$

จะได้ว่า

1. กฎการบวก $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = K + L$
2. กฎการลบ $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = K - L$
3. กฎการคูณ $\lim_{x\to a}(f(x)\, g(x)) = KL$
4. กฎการหาร $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K}{L}$ เมื่อ $L \neq 0$

ในการหาลิมิตของ $f(x)$ โดยทั่วไปนั้น หากไม่ต้องการความเป็นทางการสามารถทำได้โดยใช้กฎต่างๆของลิมิต รวมถึงการนำเอาค่าของลิมิตของบางฟังก์ชันที่เห็นได้ชัดเจนมาใช้ (สามารถแสดงให้เห็นได้โดยใช้นิยามของลิมิต) เช่น $\lim_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ หรือ $\lim_{x\to a} x = a$

2.1.1 ลิมิตซ้ายและลิมิตขวา (Left-Hand and Right-Hand Limits)

นิยาม 2.2 กำหนด $f(x)$ นิยามบนช่วงเปิด (a, b) โดยที่ $b < a$ และถ้า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ K เมื่อ x เข้าใกล้ a ในช่วง (b, a) แล้วกล่าวได้ว่า f มีลิมิตซ้ายที่ a เท่ากับ K และจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = K$$

นิยาม 2.3 กำหนด $f(x)$ นิยามบนช่วงเปิด (a, c) และถ้า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ในช่วง (a, c) แล้วกล่าว ได้ว่า f มีลิมิตขวาที่ a เท่ากับ L และจะเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

ทฤษฎีบท 2.4 $\lim_{x\to a} f(x) = K$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^-} f(x) = K$ และ $\lim_{x\to a^+} f(x) = K$ ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้บวกหรือลบอนันต์

ในการพิจารณาขอบเขตของ $f(x)$ จำเป็นต้องศึกษาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มมากขึ้นจนถึงบวกอนันต์ หรือลดลงจนถึงลบอนันต์ การศึกษาดังกล่าวสามารถทำได้โดยใช้

นิยาม 2.4 $\lim_{x\to\infty} f(x) = K$ หมายถึง $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ K (หรือมีค่าลิมิต= K) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้อนันต์

นิยาม 2.5 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ หมายถึง $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L (หรือมีค่าลิมิต= L) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ลบอนันต์

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้า $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = K$ และ $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L$ โดยที่ K และ L เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. กฎการบวก $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) + g(x) = K + L$
2. กฎการลบ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - g(x) = K - L$
3. กฎการคูณ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\, g(x) = KL$
4. กฎการหาร $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K}{L}$ เมื่อ $L \neq 0$

2.2 ความต่อเนื่อง

นิยาม 2.6 ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด c (c อยู่ในโดเมนของ f) ถ้า $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

นิยาม 2.7 สำหรับฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนคือ $[a, b]$ จะกล่าวว่า f มีความต่อเนื่องที่จุดปลายซ้าย a ถ้า

$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ และ f มีความต่อเนื่องที่จุดปลายขวา b

ถ้า $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

2.2.1 การทดสอบความต่อเนื่อง

จากนิยามของ f ที่มีความต่อเนื่องที่จุด c (c อยู่ในโดเมนของ f) สามารถสรุปเป็นเงื่อนไข 3 ข้อดังนี้ $f(c)$ หาค่าได้

$\lim_{x\to c} f(x)$ หาค่าได้

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

สำหรับจุดที่เป็นจุดปลายของโดเมนของ f นั้น ให้แทนในข้อ 2 และข้อ 3 ด้วยลิมิตซ้ายหรือลิมิตขวาของจุดปลายแล้วแต่กรณี

3. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงนิยามหรือความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่างๆทฤษฎีของอนุพันธ์ ตลอดจนการนำเอาอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้ ซึ่งรวมถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดเป็นต้น

3.1 อนุพันธ์

นิยาม 3.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x คือฟังก์ชัน f' โดยที่ $f'(x)$ นิยามดังนี้

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ โดเมนของ f' คือจุดทุกจุดในโดเมน f ที่ทำให้ลิมิต
ดังกล่าวหาค่าได้

นิยาม 3.2 f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ (Differentiable) ที่จุด x ถ้า $f'(x)$ หาค่าได้

นิยาม 3.3 f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ถ้า $f'(x)$ หาค่าได้ที่ทุกๆจุดบนโดเมน f

หมายเหตุ สำหรับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ นอกจากจะใช้สัญลักษณ์ $f'(x)$ แล้วยังมีสัญลักษณ์อื่นที่นิยมใช้อีกเช่น y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ หรือ $\frac{df(x)}{dx}$

3.1.1 กฎต่างๆสำหรับการหาอนุพันธ์

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้

$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ กฎการบวก

$\frac{d(u-v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$ กฎการลบ

$\frac{d(u\cdot v)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ กฎการคูณ

$\frac{d\frac{u}{v}}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ กฎการหาร

$\frac{d(cu)}{dx} = \frac{cdu}{dx}$, c เป็นจำนวนจริง กฎการคูณด้วยค่าคงที่

นิยาม3.4 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ สำหรับช่วงเปิดใดๆ ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ทุกๆจุดบนช่วงเปิดนั้นๆ

นิยาม 3.5 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ สำหรับช่วงปิด $[a, b]$ ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ทุกๆจุดบนช่วงเปิด (a, b) และ $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (อนุพันธ์ที่จุด a) และ
$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$
(อนุพันธ์ด้านซ้ายที่จุด b) หาค่าได้

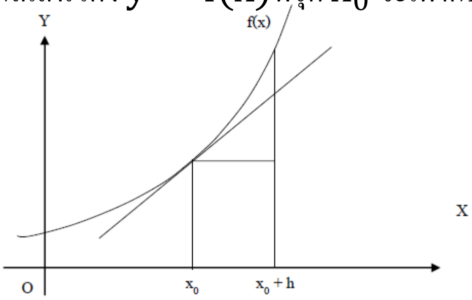
3.1.2 ฟังก์ชันโดยนัย(Implicit Functions)

จากที่กล่าวมาข้างต้น สำหรับ $y = f(x)$ การหา $\frac{dy}{dx}$ นั้นทำได้โดยไม่ยากนัก อย่างไรก็ตาม มีความสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x ที่ไม่สามารถเขียนในรูปดังกล่าวได้ หรือเขียนได้แต่ไม่ง่ายนัก อย่างเช่น

$x^2 + y^2 = \sin(y)$ หรือ $x^3 - y^3 = 2x^2y^2$ เป็นต้น จะเรียก y ดังกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันโดยนัย การหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันโดยนัยนั้น สามารถทำโดยให้ถือว่า y เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x

3.1.3 ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

เมื่อพิจารณานิยามของการหาอนุพันธ์ที่จุดที่ $x = x_0$ และจากรูปที่ 2.1 จะเห็นได้ว่า ความชันของเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด x_0 จะเท่ากับ $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} = f'(x_0)$



ภาพที่ 1 แสดงเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด x_0

3.1.4 อนุพันธ์อันดับสองและมากกว่าอันดับสอง

อนุพันธ์ $y' = \frac{dy}{dx}$ เรียกว่าเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first-order derivative) ของ y เทียบกับ x ถ้าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า $y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$

จะเรียก y'' ว่าเป็นอนุพันธ์อันดับสอง (second-order derivative) ของ y เทียบกับ x และถ้า y'' เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า $y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$ เรียกว่าเป็นอนุพันธ์อับดับสาม(third-order derivative)

ดังนั้นอนุพันธ์อันดับ n (nth-order derivative) ของ y เทียบกับ x สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆนั้น สามารถเขียนแทนได้ $y^{(n)}$ ทั้งนี้ $y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$

3.2 การประยุกต์ใช้อนุพันธ์

อัตราการเปลี่ยนแปลง (Rate of Changes)

ในการศึกษาอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่างๆ อย่างเช่นการเปลี่ยนแปลงของระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่เมื่อเทียบกับเวลา อัตราการเปลี่ยนแปลงของต้นทุนของสินค้าเมื่อเทียบกับจำนวนที่ผลิต อัตราการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้าเมื่อเทียบกับราคาน้ำมัน สิ่งเหล่านี้ได้มีการนำเอาอนุพันธ์เข้าไปประยุกต์ใช้กันอย่างมาก

นิยาม 3.6 อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x ที่ a เขียนแทนด้วย

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

4. ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

อินทิเกรชัน และการประยุกต์ (Integrationand Applications)

ใน หัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาฟังก์ชันจากอนุพันธ์ที่กำหนดให้ การหาอินทิกรัลแบบไม่จำกัด และการหาอินทิกรัลแบบจำกัด รวมถึงเทคนิคต่างๆที่ใช้ในการหาอินทิกรัล และการนำเอาอินทิกรัลไปประยุกต์ใช้

4.1 อินทิกรัลแบบไม่จำกัด (Indefinite Integrals)

ในกระบวนการที่จะหา $f(x)$จากอนุพันธ์ของ $f'(x)$ที่กำหนด พร้อมทั้งค่าคงที่อีกค่าหนึ่งของ $f(x)$นั้นอาจแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอนด้วยกัน ขั้นแรกเป็นการหาปฏิยานุพันธ์ของf (Anti-Derivative) ทั้งหมด สำหรับขั้นตอนที่สองเป็นการหาอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับค่าที่กำหนดให้

นิยาม4.1 กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$และอนุพันธ์ของ $f(x)$หรือ $f'(x)$สำหรับทุกค่า xที่อยู่ในโดเมนของ f ปฏิยานุพันธ์ของfทั้งหมดจะเรียกว่าเป็นอินทิกรัลไม่จำกัดของ f เทียบกับ x เขียนแทนด้วย $\int f(x)dx$

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนด ฟังก์ชัน $f(x)$ และ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$อินทิกรัลไม่จำกัดของ f เทียบกับ x จะเท่ากับผลบวกของ $F(x)$ กับค่าคงที่ นั่นคือ $\int f(x)dx = F(x) + c$ ค่า cเรียกว่าเป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรชัน (Constant of Integration) หรือค่าคงที่ไม่เจาะจง (Arbitrary Constant)

สูตรการหาอินทิกรัลไม่จำกัด

1. $\int k\,dx = kx + C$, k เป็นค่าคงที่
2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, n เป็นจำนวนตรรกยะและ$n \neq -1$

4.1.1 กฎของอินทิกรัลไม่จำกัด

กฎการคูณด้วยค่าคงที่ $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ k เป็นจำนวนจริง

กฎการบวกและลบ$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4.2 เทคนิคของการอินทิกรัล (Integration Technique)

อย่างที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น การหาอินทิกรัลไม่จำกัดสำหรับบางฟังก์ชัน เช่น $\ln x$การที่จะหาปฏิยานุพันธ์ของ $\ln x$ หรือหาว่า$f(x)$ใดที่มีอนุพันธ์คือ $\ln x$ไม่ใช่เป็นสิ่งที่ง่าย ดังนั้น การหาอินทิกรัล

ไม่จำกัดเขตสำหรับบางฟังก์ชันจำเป็นต้องมีเทคนิคหรือวิธีการโดยเฉพาะ วิธีสำคัญๆ คือ

1. วิธีเปลี่ยนตัวแปร (Substitution Method)
2. วิธีเศษส่วนย่อย (Partial FractionMethod)
3. วิธีแยกส่วน (By Part Technique)
4. วิธีแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Substitution)

วิธีสับเปลี่ยนตัวแปร

สำหรับอินทิกรัลไม่จำกัดที่อยู่ในรูปของ $\int f\big(g(x)\big)g^{'}(x)dx$ โดยที่ f และ g' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องนั้น มีวิธีการดังนี้

กำหนดให้ $u = g(x)$ และ $du = g'(x)$ ซึ่งจะทำให้ได้ว่า $\int f\big(g(x)\big)g^{'}(x)dx = \int f(u)du$ หาอินทิกรัลไม่จำกัดเปรียบเทียบกับตัวแปร u แทนค่า u ด้วย $g(x)$

4.3 อินทิกรัลแบบจำกัด (Definite Integrals)

นิยาม4.2 กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่หาปฏิยานุพันธ์ได้ในช่วง $[a, b]$ และ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

จะกล่าวได้ว่าอินทิกรัลแบบจำกัดของ f ในช่วง $[a, b]$

เขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

หมายเหตุ ค่าของ $F(b) - F(a)$ อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $[F(x)]_a^b$

ทฤษฎีบท 4.2 กฎของอินทิกรัลแบบจำกัด

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^b f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

4.4 การประยุกต์ใช้อินทิกรัล(Application of Integrals)

ในการนำเอาอินทิกรัลไปประยุกต์ใช้มีหลากหลายรูปแบบ เช่น การหาค่าความยาวของเส้นโค้ง การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง การหาปริมาตรของรูปทรงต่างๆ แต่ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเฉพาะการนำไปประยุกต์ใช้ในการหาพื้นที่เท่านั้น

4.4.1 การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง

ในการหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง เส้นโค้ง $y = f(x)$ ในช่วงที่ n มีค่าอยู่ในช่วง $[a, b]$ นั้น สามารถนำเอาการอินทิกรัลแบบจำกัดไปประยุกต์ใช้ได้ ทั้งนี้พื้นที่ดังกล่าวจะหาได้จาก $\int_a^b f(x)dx$

4.4.2 การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับเส้นโค้ง $y = g(x)$ โดยที่ $f(x) \geq g(x)$ ในช่วง $[a, b]$ นั้นหาได้จาก $\int_a^b f(x) - g(x)dx$

บทที่ 3

อุปกรณ์และวิธีการทดลอง

การดำเนินการทำโครงงาน ผู้จัดทำได้ดำเนินการซึ่งประกอบด้วยรายละเอียดตามขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นตอนการดำเนินงาน
2. วัสดุอุปกรณ์

1. ขั้นตอนการดำเนินงาน

ตารางการดำเนินงานทำโครงงาน

ลำดับที่	ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลา	หมายเหตุ
1	วางแผนการทำงานกับคุณครูที่ปรึกษา	3ธันวาคม 2556	นางสุธีรา แก้วบุญเรือง และ คณะผู้จัดทำ
2	จัดทำบทที่ 1 : ที่มาและความสำคัญ	7ธันวาคม 2556 – 9 ธันวาคม 2556	คณะผู้จัดทำ
3	ตรวจสอบบทที่ 1 โดยคุณครูที่ปรึกษา	12 ธันวาคม 2556	นางสุธีรา แก้วบุญเรือง
4	ปรับปรุงบทที่ 1 ตามคำแนะนำของคุณครูที่ปรึกษา	13 – 15 ธันวาคม 2556	คณะผู้จัดทำ
5	ศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ดังนี้1. อนุกรมอนันต์ 2. ลิมิตและความต่อเนื่อง 3. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 4. ปริพันธ์ของฟังก์ชัน	14 – 20 ธันวาคม 2556	คณะผู้จัดทำ
6	ศึกษาการใช้โปรแกรม GSP เบื้องต้น	22 – 27ธันวาคม 2556	นายคณิต ไวท์ยางกูร และคณะผู้จัดทำ
7	จัดทำบทที่ 2 : เอกสารที่เกี่ยวข้อง	29 ธันวาคม 2556 –1 มกราคม 2557	คณะผู้จัดทำ
8	ตรวจสอบบทที่ 2 โดยคุณครูที่	2 – 6 มกราคม 2557	นางสุธีรา แก้วบุญเรือง

ลำดับที่	ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลา	หมายเหตุ
	ที่ปรึกษา		
9	จัดทำบทที่ 3 : อุปกรณ์และวิธีการทดลอง	9 มกราคม 2557	คณะผู้จัดทำ
10	ศึกษาวิธีใช้โปรแกรม GSP ที่เกี่ยวข้องกับการหาพื้นที่ที่ปิดล้อม	10 - 20มกราคม 2557	คณะผู้จัดทำ
11	นำโปรแกรม GSP มาใช้ประกอบกับการศึกษาหาพื้นที่ที่ปิดล้อม	23 – 31 มกราคม 2557	คณะผู้จัดทำ
12	จัดทำบทที่ 4 : อภิปรายผลการทดลอง	1 – 7กุมภาพันธ์ 2557	คณะผู้จัดทำ
13	ตรวจสอบบทที่ 4 โดยคุณครูที่ปรึกษา	9 – 11กุมภาพันธ์ 2557	นางสุธีรา แก้วบุญเรือง
14	จัดทำบทที่ 5 : สรุปผลการทดลอง	12– 20กุมภาพันธ์2557	คณะผู้จัดทำ
15	ตรวจสอบบทที่ 5 โดยคุณครูที่ปรึกษา	21 กุมภาพันธ์ 2557	นางสุธีรา แก้วบุญเรือง
16	จัดทำรูปเล่ม	25 กุมภาพันธ์ 2557	คณะผู้จัดทำ
17	ตรวจสอบและปรับปรุงตามคำแนะนำของคุณครูที่ปรึกษา	26-31 พฤษภาคม 2557	คณะผู้จัดทำ

2. วัสดุอุปกรณ์

1. คอมพิวเตอร์(โปรแกรม GSP)
2. กระดาษ
3. เครื่องเขียน

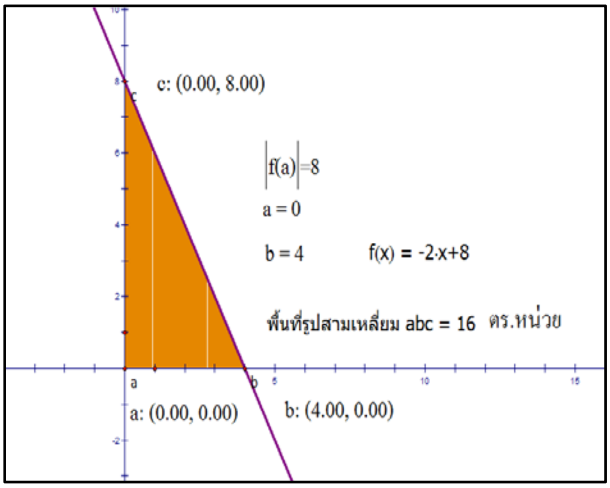
บทที่ 4

ผลการดำเนินงาน

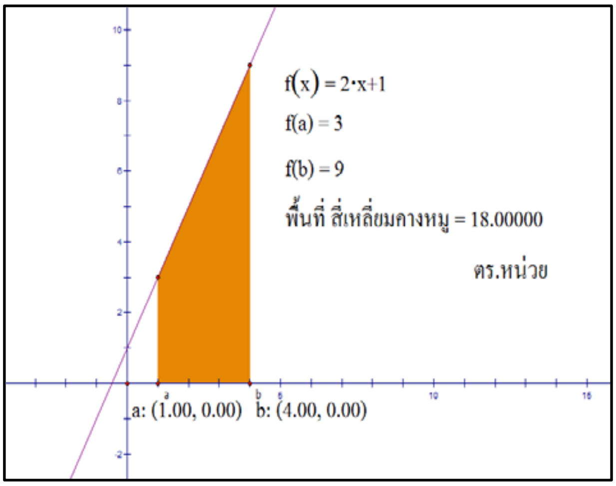
ผู้จัดทำโครงงานขอนำเสนอผลการดำเนินงานดังกล่าวตามวัตถุประสงค์ ดังนี้

1. อธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรงบนแกน xในช่วง $[a, b]$ โดยการใช้โปรแกรม GSP
2. อธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งบนแกน xในช่วง $[a, b]$ โดยการใช้โปรแกรมGSP

1.อธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรงบนแกน xในช่วง [a, b]โดยการใช้โปรแกรม GSP



ก.



ข.

ภาพที่ 2

ก. แสดงการหาพื้นที่ใต้กราฟเส้นตรงที่มีพื้นที่เป็นรูปสามเหลี่ยม

ข. แสดงการหาพื้นที่ใต้กราฟเส้นตรงที่มีพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

จากภาพ พื้นที่ใต้กราฟสมการเส้นตรง $y = -2x + 8$ และสมการ$y = 2x + 1$ เมื่อกำหนดช่วง $[a, b]$ โดยที่ $a < b$แล้วสามารถแบ่งพื้นที่ได้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งหาได้จากสมการทั่วไปคือ

$$\text{พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู} = \frac{1}{2} \times \text{ผลบวกของด้านคู่ขนาน} \times \text{สูง}$$

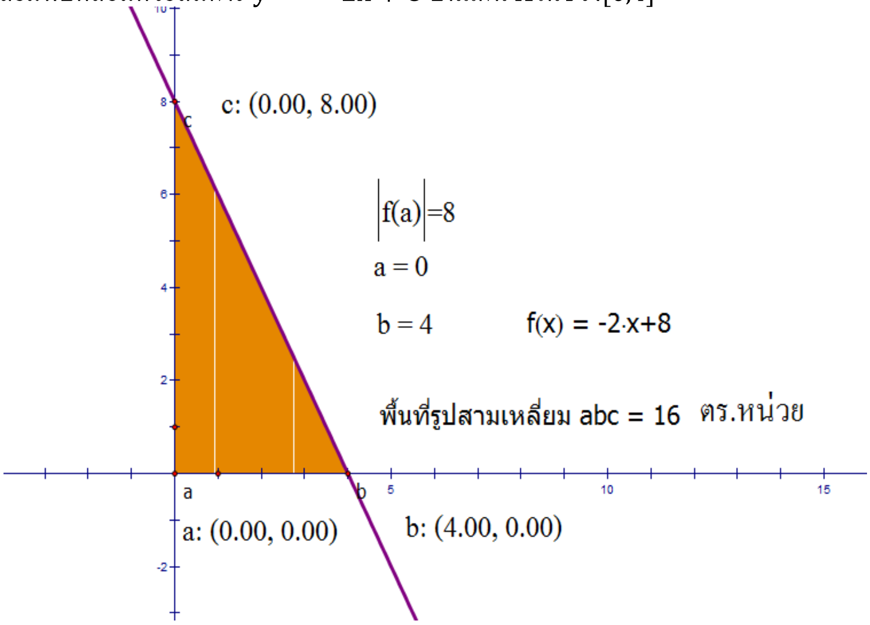
$$= \frac{1}{2} \times \{f(a) + f(b)\} \times (b - a)$$

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

$$= \frac{1}{2} \times (b - a) \times |f(a)|$$

ตัวอย่างเช่น

การหาพื้นสามเหลี่ยมที่ปิดล้อมด้วยสมการ $y = -2x + 8$ บนแกน X ในช่วง[0,4]



ภาพที่ 3แสดงการหาพื้นสามเหลี่ยมที่ปิดล้อมด้วยสมการ $y = -2x + 8$ บนแกน X ในช่วง[0,4]

$f(a) = -2(0) + 8 = 8$

พื้นที่สามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times (b - a) \times |f(a)|$

$$= \frac{1}{2} \times (4 - 0) \times 8$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 8$$

พื้นที่สามเหลี่ยม $= 16$ตารางหน่วย

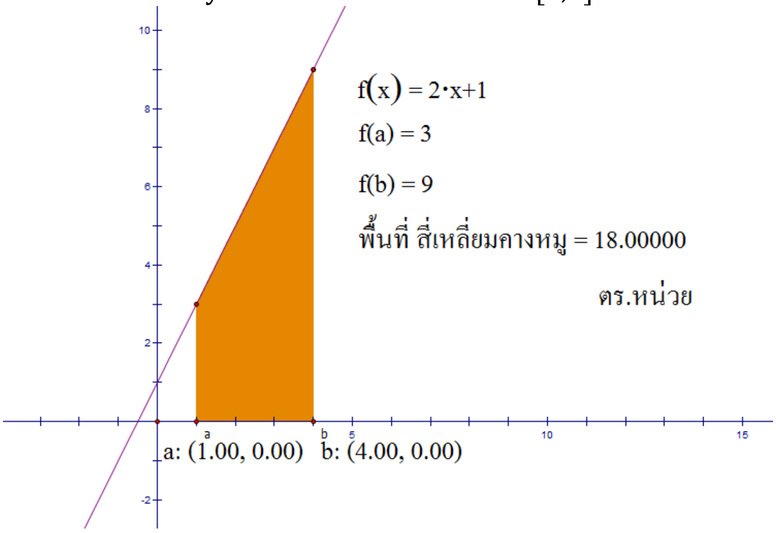
ตัวอย่างการหาพื้นที่โดยการปริพันธ์จำกัดเขต ให้ A แทนพื้นที่

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx$$
$$= \int_1^4 (-2x + 8)dx$$
$$= -\frac{2x^2}{2} + 8x \Big|_0^4$$
$$= -x^2 + 8x \Big|_0^4$$
$$= (-16 + 32) - (-0 + 0)$$
$$A = -16 + 32$$
$A = 16$ตารางหน่วย

พื้นที่ A = 16 ตารางหน่วย

จากตัวอย่างทั้งสองจะเห็นได้ว่าพื้นที่ที่ได้จากการหาโดยใช้สมการทั่วไปและการหาโดยการใช้ปริพันธ์จำกัดเขตนั้น ได้คำตอบของพื้นที่เท่ากัน คือ 16 ตารางหน่วย

การหาพื้นสี่เหลี่ยมที่ปิดล้อมด้วยสมการ $y = 2x + 1$บนแกน x ในช่วง [1,4]



ภาพที่ 4 แสดงการหาพื้นสี่เหลี่ยมที่ปิดล้อมด้วยสมการ $y = 2x + 1$บนแกน x ในช่วง [1,4]

$f(a) = 2(1) + 1 = 3$
$f(b) = 2(4) + 1 = 9$
พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2} \times \{f(a) + f(b)\} \times (b - a)$

$$= \frac{1}{2} \times (3 + 9) \times (4 - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 3$$

พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู = 18 ตารางหน่วย

ตัวอย่างการหาพื้นที่โดยการปริพันธ์จำกัดเขต ให้ A แทนพื้นที่

$$A = \int_1^4 f(x)\,dx$$
$$= \int_1^4 (2x + 1)dx$$
$$= x^2 + x \Big|_1^4$$
$$= (16 + 4) - (1 + 1)$$
$$= 20 - 2$$
$$A = 18\text{ตารางหน่วย}$$

พื้นที่ A เท่ากับ 18 ตารางหน่วย

ดังนั้น การหาพื้นทีที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรง บนแกน xในช่วง$[a, b]$

1. พื้นที่ปิดล้อมเป็นรูปสามเหลี่ยม

$A = \frac{1}{2} \times (b - a) \times |f(a)| = \int_a^b f(x)dx$ตารางหน่วยเมื่อ Aแทนพื้นที่ที่ปิดล้อม

2. พื้นที่ปิดล้อมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

$$A = \frac{1}{2} \times \{f(a) + f(b)\} \times (b - a) = \int_a^b f(x)dx$$ ตารางหน่วยเมื่อ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อม

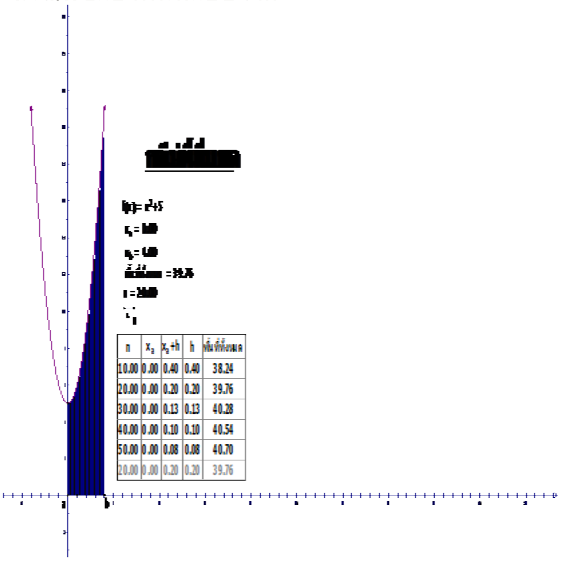
2.อธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งบนแกน x ในช่วง [a, b] โดยการใช้โปรแกรม GSP

ตัวอย่างเช่น

การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $f(x) = x^2 + 5$ บนช่วง [0,4] และแกน x บนช่วง [0,4] แบ่งเป็นช่วงย่อยที่กว้างเท่าๆกัน n ช่องย่อย ซึ่งแต่ละช่องจะกว้าง $\Delta x_k = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ จุดปลายช่วงย่อยต่างๆ คือ $0, \frac{4}{n}, \frac{8}{n}, \frac{12}{n}, \dots, \frac{4(n-1)}{n}, \frac{4n}{n} = 4$

2.1การแบ่งพื้นที่ย่อยๆ

กรณีที่ 1แบ่งพื้นที่แบบขาด



<u>กรณีแบ่งพื้นที่แบบขาด</u>

f(x) = x²+5

x_a = 0.00

x_b = 4.00

พื้นที่ทั้งหมด = 39.76

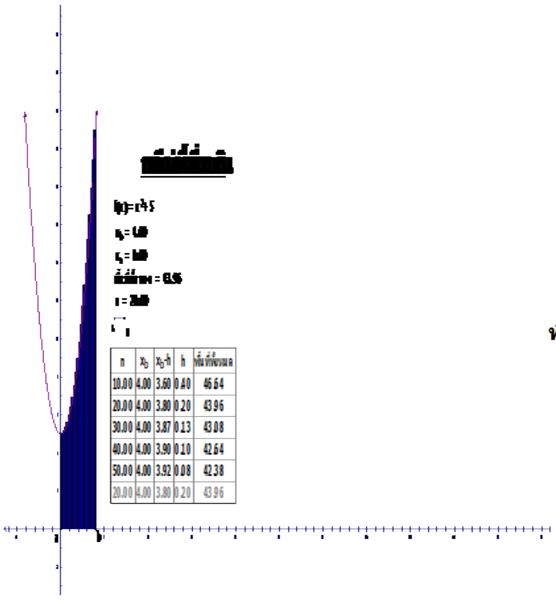
n = 20.00

A **n**

n	x_a	x_a+h	h	พื้นที่ทั้งหมด
10.00	0.00	0.40	0.40	38.24
20.00	0.00	0.20	0.20	39.76
30.00	0.00	0.13	0.13	40.28
40.00	0.00	0.10	0.10	40.54
50.00	0.00	0.08	0.08	40.70
20.00	0.00	0.20	0.20	39.76

ภาพที่ 5แสดงการหาพื้นที่ใต้กราฟเส้นโค้งแบบขาดโดยการใช้โปรแกรม GSP

กรณีที่ 2แบ่งพื้นที่แบบเกิน



<u>กรณีแบ่งพื้นที่แบบเกิน</u>

f(x) = x²+5

x_b = 4.00

x_a = 0.00

พื้นที่ทั้งหมด = 43.96

n = 20.00

A **n**

n	x_b	x_b-h	h	พื้นที่ทั้งหมด
10.00	4.00	3.60	0.40	46.64
20.00	4.00	3.80	0.20	43.96
30.00	4.00	3.87	0.13	43.08
40.00	4.00	3.90	0.10	42.64
50.00	4.00	3.92	0.08	42.38
20.00	4.00	3.80	0.20	43.96

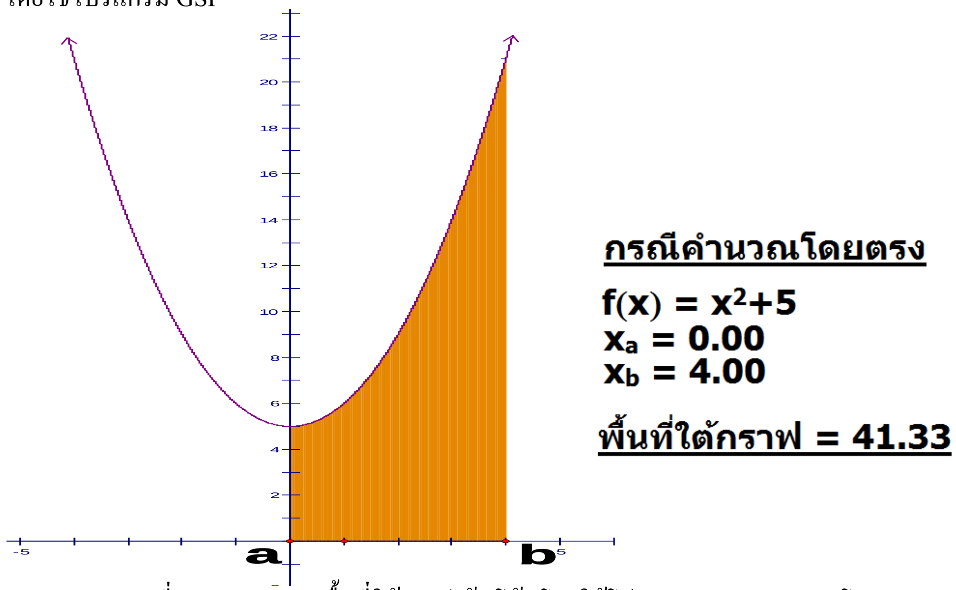
ภาพที่ 6แสดงการหาพื้นที่ใต้กราฟเส้นโค้งแบบเกินโดยการใช้โปรแกรม GSP

เปรียบเทียบการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งระหว่างการแบ่งพื้นที่แบบเกินกับการแบ่งพื้นที่แบบขาด จะได้ว่า

- การแบ่งพื้นที่แบบเกินเมื่อเพิ่มจำนวนช่องเล็กๆ(n)เมื่อ$n \to \infty$ค่าของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งจะลดลงและเข้าใกล้ค่าของพื้นที่จริงที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ทฤษฎี เท่ากับ 41.33 ตร.หน่วย
- การแบ่งพื้นที่แบบขาด เมื่อเพิ่มจำนวนช่องเล็กๆ(n)เมื่อ$n \to \infty$ค่าของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งจะเพิ่มขึ้นและเข้าใกล้ค่าของพื้นที่จริงที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ทฤษฎีเท่ากับ 41.33 ตร.หน่วย)

2.2 การหาพื้นที่โดยตรง

กรณีที่ 1 โดยใช้โปรแกรม GSP



ภาพที่ 7 แสดงการหาพื้นที่ใต้กราฟเส้นโค้ง โดยใช้โปรแกรม GSP คำนวณโดยตรง

กรณีที่ 2 โดยการปริพันธ์จำกัดเขต

การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 + 5$ บนช่วง [0,4] และแกน x

ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมของกราฟบนช่วง [0,4] และแกน x

$$\mathrm{A} = \int_a^b \mathrm{f(x)dx}\text{ตารางหน่วย}$$

$$\mathrm{A} = \int_0^4 (x^2 + 5)\mathrm{dx}$$

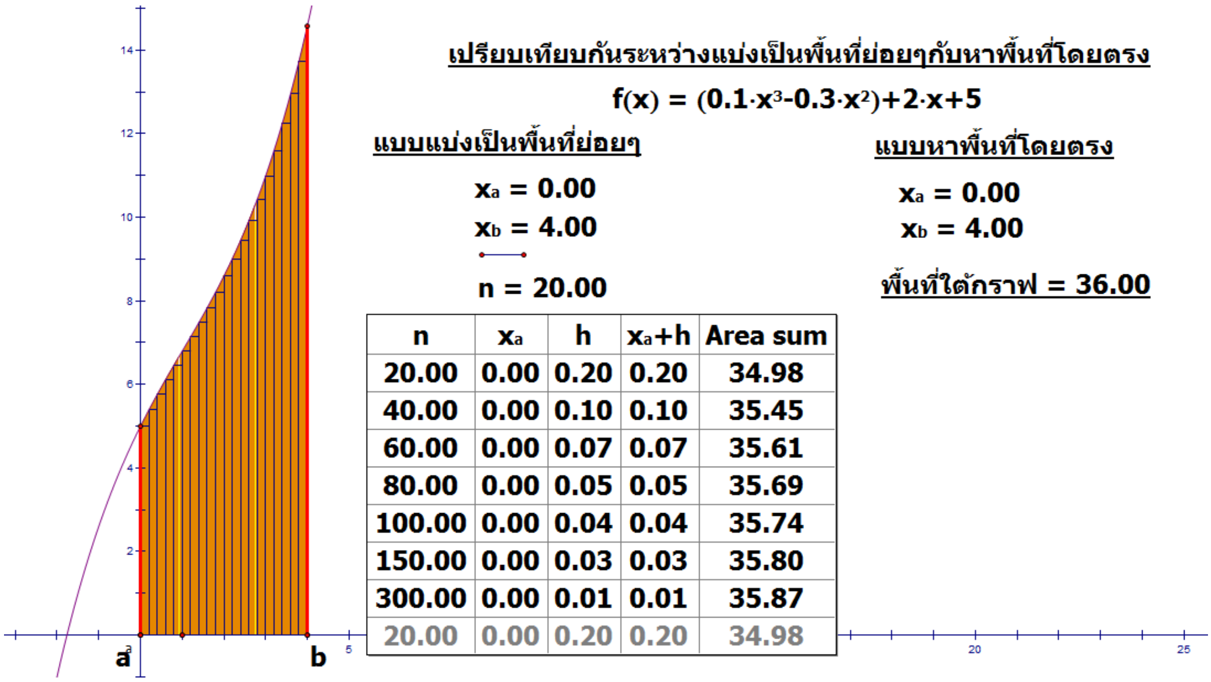
$$= \frac{x^3}{3} + 5x \Big|_0^4$$

$$= \left(\frac{64}{3} + 20\right) - (0 + 0)$$

$$= \frac{124}{3}\ \text{ตารางหน่วย}$$

พื้นที่A เท่ากับ 41.33 ตารางหน่วย

เปรียบเทียบการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งระหว่างการแบ่งเป็นพื้นที่ย่อยๆกับการคำนวณโดยตรง โดยใช้โปรแกรม GSP



n	x_a	h	x_a+h	Area sum
20.00	0.00	0.20	0.20	34.98
40.00	0.00	0.10	0.10	35.45
60.00	0.00	0.07	0.07	35.61
80.00	0.00	0.05	0.05	35.69
100.00	0.00	0.04	0.04	35.74
150.00	0.00	0.03	0.03	35.80
300.00	0.00	0.01	0.01	35.87
20.00	0.00	0.20	0.20	34.98

ภาพที่ 8แสดงการเปรียบเทียบการหาพื้นที่ใต้กราฟเส้นโค้งระหว่างการแบ่งเป็นพื้นที่ย่อยๆกับการคำนวณโดยตรง โดยใช้โปรแกรม GSP

จากภาพจะเห็นว่า การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งโดยการแบ่งพื้นที่เป็นย่อยๆเมื่อจำนวนช่องเล็กๆนั้นมากขึ้นเรื่อยๆจะได้ค่าที่ใกล้เคียงกับการคำนวณโดยตรง โดยโปรแกรม GSPมากยิ่งขึ้น

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

ผู้จัดทำโครงงานขอนำเสนอผลการดำเนินงาน ดังนี้

1. เพื่ออธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรงบนแกน x ในช่วง $[a, b]$ โดยการใช้โปรแกรม GSP
2. เพื่ออธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งบนแกน x ในช่วง $[a, b]$ โดยการใช้โปรแกรม GSP

1.เพื่ออธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรงบนแกน x ในช่วง $[a, b]$ โดยการใช้โปรแกรม GSP

การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นตรงบนแกน x ในช่วง $[a, b]$

1.1 ถ้ากราฟ $y = f(x)$ ตัดแกน x ที่ a จะได้พื้นที่ปิดล้อมเป็นรูปสามเหลี่ยม สามารถหาพื้นที่ที่ปิดล้อมได้ คือ

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูงซึ่งมีค่าเท่ากับ $A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

เมื่อ A แทนพื้นที่ และเมื่ออธิบายด้วยการใช้โปรแกรม GSP จะได้พื้นที่เท่ากัน

1.2 ถ้ากราฟ $y = f(x)$ บนแกน x ในช่วง $[a, b]$ พื้นที่ที่ปิดล้อมจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู สามารถหาพื้นที่โดยการใช้สูตร พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2} \times$ ผลบวกของด้านคู่ขนาน $\times$ สูง ซึ่งมีค่าเท่ากับ $A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ตารางหน่วย และเมื่ออธิบายโดยใช้โปรแกรม GSP จะมีพื้นที่เท่ากัน

2.เพื่ออธิบายการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งบนแกน x ในช่วง $[a, b]$ โดยการใช้โปรแกรม GSP

กราฟ $y = f(x)$ ที่มีกราฟเป็นรูปเส้นโค้ง ในการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งค่อนข้างมีความซับซ้อน แต่สามารถอธิบายได้ โดยการแบ่งพื้นที่ที่ปิดล้อมเป็นช่องเล็กๆ แล้วนำพื้นที่ที่อยู่ในช่องเล็กๆ นั้นมาบวกกัน

2.1 การแบ่งพื้นที่แบบเกินเมื่อเพิ่มจำนวนช่องเล็กๆ (n) เมื่อ $n \to \infty$ ค่าของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งจะลดลงและเข้าใกล้ค่าของพื้นที่จริงที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ทฤษฎี

2.2 การแบ่งพื้นที่แบบขาด เมื่อเพิ่มจำนวนช่องเล็กๆ (n) เมื่อ $n \to \infty$ ค่าของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งจะเพิ่มขึ้นและเข้าใกล้ค่าของพื้นที่จริงที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ทฤษฎี

2.3 การคำนวณโดยตรง โดยใช้โปรแกรม GSP จะได้ค่าของพื้นที่จริง ซึ่งเท่ากับการคำนวณโดยการปริพันธ์จำกัดเขต แต่สะดวกและรวดเร็วกว่าการปริพันธ์จำกัดเขต

ข้อเสนอแนะ

1. การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งบนแกน x ในช่วง $[a, b]$ โดยใช้ทฤษฎี ควรศึกษาทฤษฎีให้เข้าใจอย่างชัดเจน
2. การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟเส้นโค้งบนแกน x ในช่วง $[a, b]$ โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ควรศึกษาการใช้โปรแกรมให้เข้าใจอย่างชัดเจน

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6.** กรุงเทพฯ : ลาดพร้าว, 2553.

ปริพันธ์ของฟังก์ชัน.[ออนไลน์].เข้าถึงได้จาก: www.pnu.ac.thwebpnufile_egnfilesmath1(1).doc?. (วันที่สืบค้นข้อมูล : 16 ธันวาคม 2555).

ลิมิตและความต่อเนื่อง.[ออนไลน์].เข้าถึงได้จาก: mathstat.sci.tu.ac.th/~charinthip/.../MA111/Chapter1-complete.pdf.(วันที่สืบค้นข้อมูล : 10 ธันวาคม 2555).

สุธีรา แก้วบุญเรือง.**การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องกำหนดการเชิงเส้น การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และความพึงพอใจต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ระหว่างการสอนโดยใช้สื่อโปรแกรม GSP กับการสอนปกติ**. มหาสารคาม : ภาควิชาวิจัยและพัฒนาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม, 2555.

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน.[ออนไลน์].เข้าถึงได้จาก: as.nida.ac.th/th/images/stories/download/Math.../Ch-3%20Diff.pdf .(วันที่สืบค้นข้อมูล : 14 ธันวาคม 2555).